Верхние и нижние индексы! Видел недавно методичку по этой теме другого человека - и у него опять скатилось к «дельта альфа-альфа штрих, дельта альфа-бета-гамма». Напоминаю, что все эти дельты – это самый сложный записать единичку и нолик, и в определённой степени идиотизм (самый сложный способ записать один бит памяти).

А хочется чего-то более физичного. Как я уже говорил, в физике все привычные нам вектора – это вектора с верхними индексами. А есть где-нибудь с нижними?

Самый очевидный пример: базисный вектор (e_x, e_y, e_z). Но это, знаете ли, не сильно физичней дельта-символов.

И всё-таки в физике есть один пример ковектора (т.е. вектора с нижнего индексами). Да ещё без скачков между системами координат, которые 100% задолбали читателя на линале. Для этого совершим путешествие в теормех 5 сема – в гамильтонов формализм.

Ничего сверхсложного там нет. В чём идея? Вводят функцию Гамильтона H зависит только от координат и импульсов:

$$H(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, p_3)$$

Под q-шками имеют координаты вдоль соответствующих осей (x, y, z и т.д.)
В исключительных случаях гамильтониан могут явно зависеть от времени:

$$H(q_1, q_2, q_3, \dots, p_1, p_2, p_3, t)$$

Но мы будем считать, что в нашем случае не зависит.

В 95% случаев (и 99%, если магнитного поля нет) гамильтониан просто равен энергии материальной точки. Можно даже сказать иначе: это обобщение понятии энергии на случай магнитного поля.

Идея формализма: для нахождения закона движения требуется решить 2N ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Эта система из 2N уравнений называется уравнениями Гамильтона.

Давайте для примера рассмотрим декартову систему координат. $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + U(x, y, z, t)$ – обычное движение в потенциале.
Тогда запишем для такого гамильтониана уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

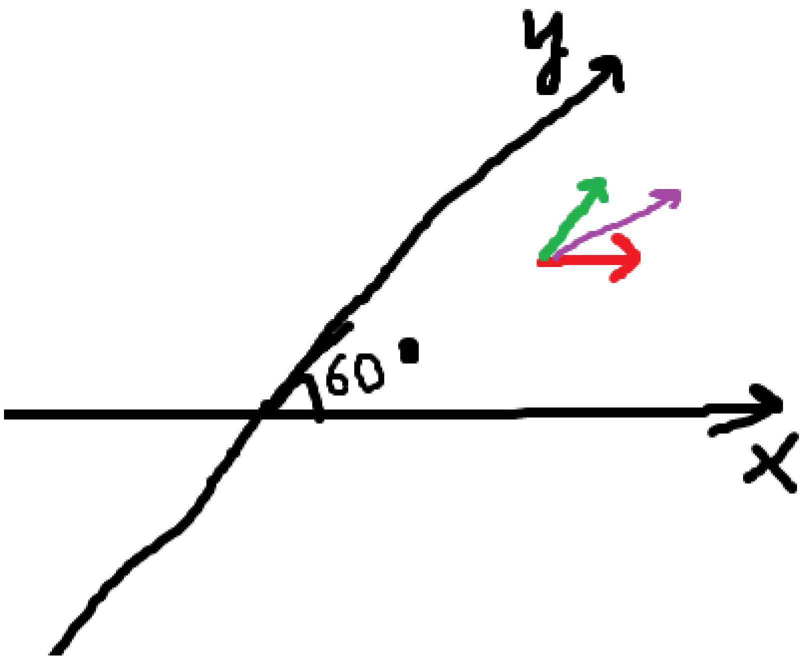
т.е.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$$

И аналогично для y и z. Что мы получили? В первой строчке хорошо знакомую формулу $m\dot{x} = p_x$, во второй – второй закон Ньютона $\dot{p_x} = F_x$, где проекция силы есть минус производная потенциала по координате: $-\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$. Очень логично!
Таким образом, гамильтонов формализм – это естественное обобщение ньютоновской механики. Только, в отличие Ньютона, она может работать и тогда, когда в роли обобщённых координат не x,y,z, а цилиндрические и сферические координаты.
Таким образом, у уравнений Гамильтона ясный физический смысл: первое $\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ связывает обобщённую скорость с обобщённым импульсом (обобщение p=mv), а второе $\dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ – помогает выразить производные импульсов по времени через обобщённую силу. Кстати, это поможет вам запомнить, в каком из уравнений Гамильтона знак минус. Студенты часто путаются: так
$\begin{cases} \dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$ или $\begin{cases} \dot{q_k} = -\frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$
Вспоминаем: сила есть МИНУС градиент потенциала, т.е. минус должен стоять при производной H по координате, т.е. $-\frac{\partial H}{\partial q_k}$. Значит, слева написано верно.

Итак, в целом гамильтонов формализм – некий апгрейд Ньютонова. Но где, спрашивается, ковекторы? А для этого возьмём недекартову СК. Для простоты уберём потенциальное поле – оставим только кинетическую энергию.



Попытаемся записать квадрат скорости через $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

Красная стрелочка - $\dot{x}$. Зелёная - $\dot{y}$. Квадрат их суммы, фиолетовой стрелочки, по теореме косинусов

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\cos 120^\circ$$

Ну или

$$E_{\text{полн}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2)$$

А теперь через импульсы. Выражаем обобщённые импульсы через скорости по формуле из 9 класса $p_x = m\dot{x}$, после чего подставляем и получаем H (она у нас $W_к + W_п$, но т.к. потенциальной энергии нет, просто $W_к$).

$p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, откуда $H = W_к = \dfrac{p_x^2 + p_x p_y + p_y^2}{2m}$.

Правильно или неправильно?

А это палка о двух концах ☺ Ответ будет зависеть о том, что вы имеете в виду под импульсом.

Ну что вы скажете? Импульс по определению $\vec{p} = m\vec{v}$. Если у вас такое определение импульса, то ваш ответ правильный.

Но давайте вспомним уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Так вот, те импульсы, которые там – это не те, которые $\vec{p} = m\vec{v}$. Ну, собственно, вспомним вывод последнего уравнения: в декартовой СК

$$H = \frac{(\vec{p}\vec{v})}{2} = (\text{только в декартовой СК!}) = \frac{p_x v_x + p_y v_y}{2}$$

Что и давало нам право записать

$$v_x = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, v_y = \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}$$

Логично, казалось бы, переписать уравнения Гамильтона, чтобы они были верны во всех СК.
Но в уравнениях Гамильтона делают иначе: вводят так называемые обобщённые импульсы P_x, P_y, не равные обычным (и равные обычным лишь в декартовой СК).

Тогда

$$H = \frac{P_x v^x + P_y v^y}{2} \text{ в любой СК}$$

$$\begin{cases} \dot{q_k} = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p_k} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \text{в любой СК}$$

Взамен за это P_x вовсе не обязан быть равен m*v_x и вообще быть коллианерен иксовой компоненте скорости (и, естественно, $P_x\overrightarrow{e_x} + P_y\overrightarrow{e_y}$ тоже в общем случае не коллинеарно скорости).

Этот вектор (P_x, P_y) и есть ковектор! Обратите внимание на запись:

$$H = \frac{P_x v^x + P_y v^y}{2}$$

С верхними индексами, как положено вектору, скорость. А вот с нижними - ковектор.

Ковектор подобен призраку: днём, в декартовой СК, он равен вектору

А ночью, не в декартовой СК, начинаются приколы.

Вопрос. Слово «обобщённый» будто бы говорит о большой применимости обобщённого импульса по сравнению с обычным. Но по факту это скорее «изнасилованный» импульс. Или нет?
Ответ: нет, «обобщённый» как раз верно – он обобщается на любые системы координат – полярные, цилиндрические, сферические. Например, момент импульса – это на самом деле обобщённый импульс по углу в цилиндрической системе координат (по определению $P_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \varphi}$). Как вы видите, тут даже уже по размерности не сходится с обычным импульсом. В этом и фишка гамильтонова формализма – привычные нам величины «нормальный импульс» и «момент импульса» обобщаются до единого, хоть и странного понятия обобщённого импульса, описываемого едиными уравнениями Гамильтона. На теормехе будете активно решать задачи на эту тему.

Теперь очередь думать читателя. Наш парадокс стартовал с формулы $H = \frac{(\vec{p}\vec{v})}{2}$. Есть и другая формула в физике со скалярным произведением: $A = \frac{(\vec{F}\vec{s})}{2}$. Является ли там сила ковектором? Если нет, то в чём разница с обобщённым импульсом? Если да, то как быть с 2-й законом Ньютона (ведь ускорение – ну уж точно вектор, а ковектор не может быть всюду коллинеарен вектору)?